Lehrstuhl für Baumechanik
TUM School of Engineering and Design
Technische Universität München

Technische Mechanik 2 - Prüfungsvorbereitungsseminar 1

Biegelinie

Sommersemester 2026

Prof. Dr.-Ing. Gerhard Müller

1. Allgemeine Fragen

a) Welche der drei gegebenen Beziehungen zwischen Biegemoment M und Ableitung der Verschiebung w ist korrekt?

- ☐ $M \sim w'$
- ☒ $M \sim w''$
- ☐ $M \sim w'''$

$w'' = \frac{M}{EI}$

w Verschiebung
w' Verdrehung
w'' Krümmung

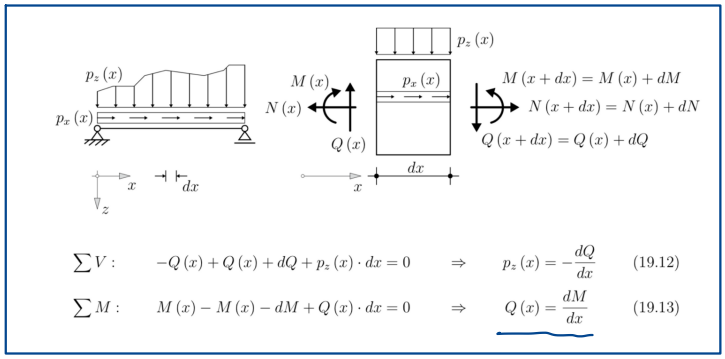


b) Welche der drei gegebenen Beziehungen zwischen Querkraft Q und Ableitung der Verschiebung w ist korrekt?

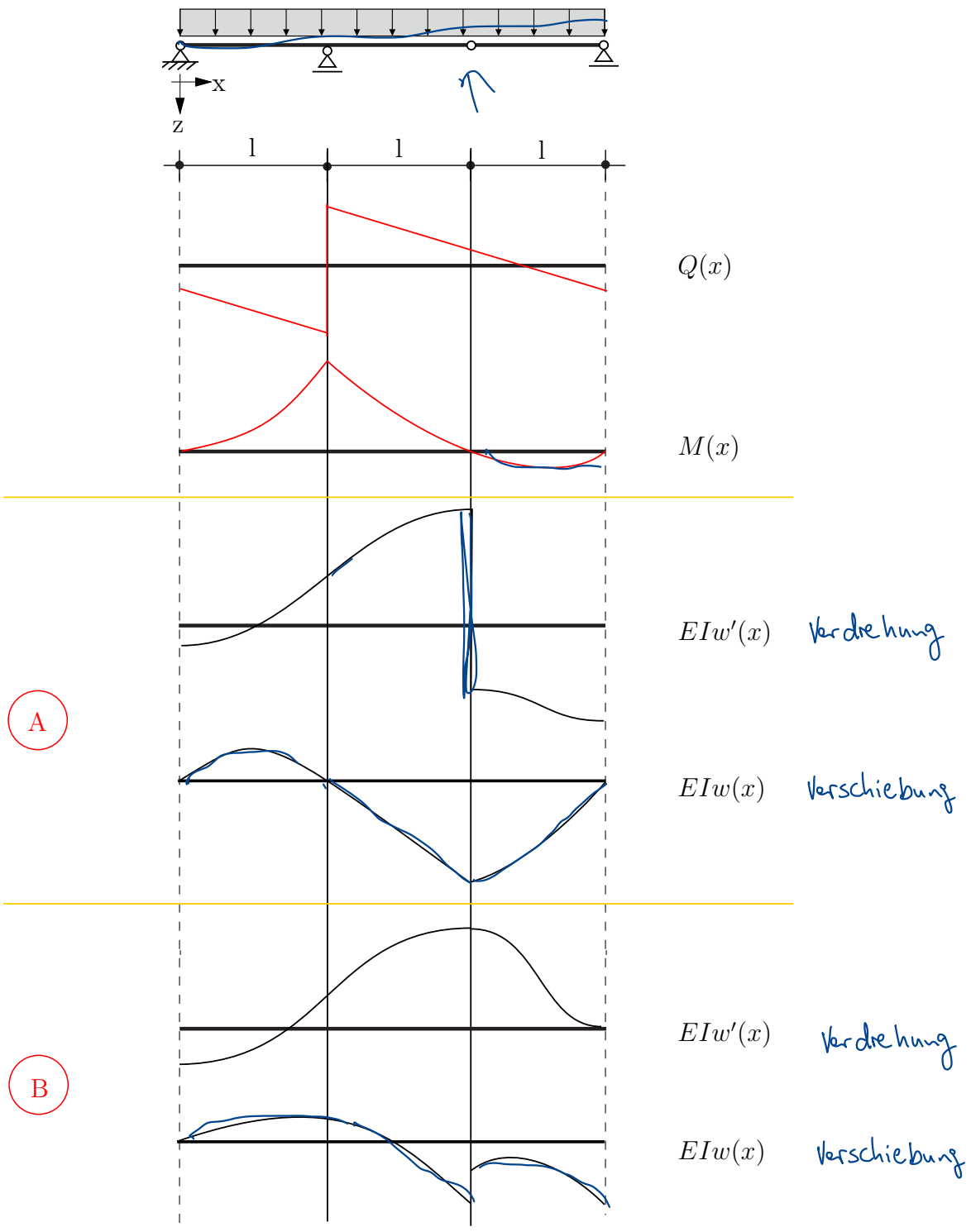
- ☐ $Q \sim w''$
- ☒ $Q \sim w'''$
- ☐ $Q \sim w''''$

$q = w''''$

siehe Skript TM 1 S. 417



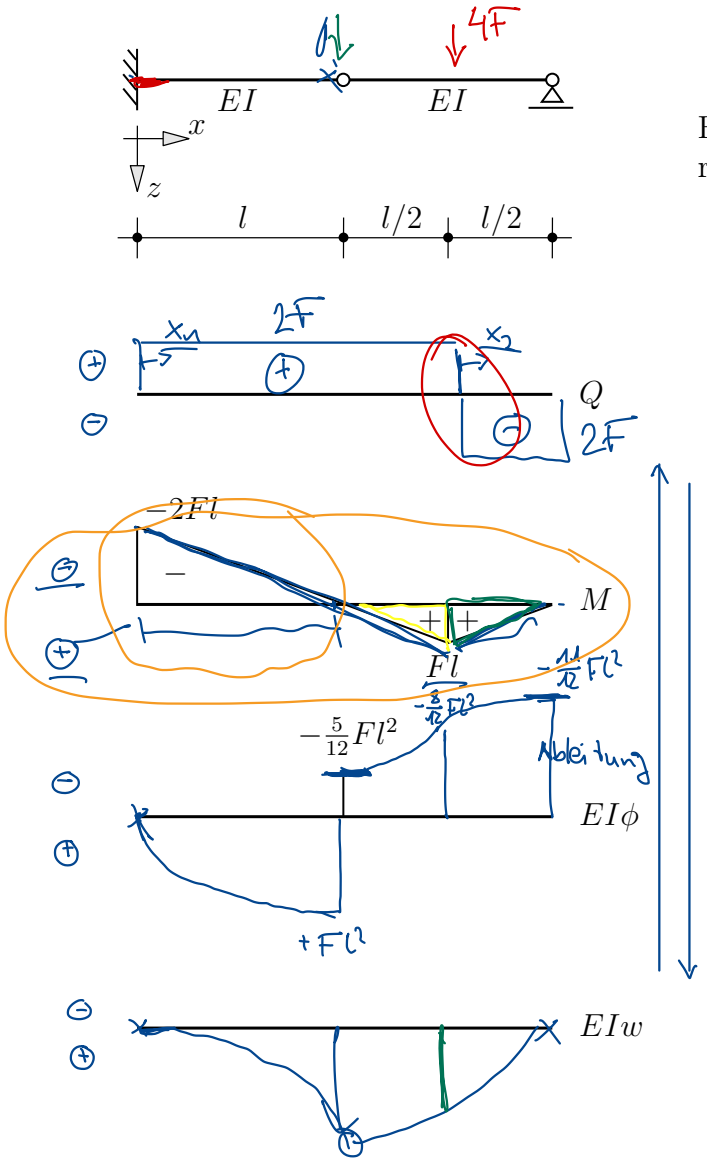
c) Gegeben ist das nachfolgende statisch bestimmte System unter einer Linienlast. Der Querkraftverlauf $Q(x)$ sowie der Momentenverlauf $M(x)$ sind ebenfalls gegeben.



Welche der beiden nachfolgend gegebenen Varianten für den Verlauf der EI-fachen Verdrehung $EI\,w'(x) = EI\,\varphi(x)$ und der EI-fachen Verschiebung $w(x)$ ist korrekt?

- [x] A
- [ ] B

2. Für den dargestellten Biegeträger ist der Verlauf des Biegemoments M_y gegeben.



Ermitteln Sie unter Verwendung der Differentialbeziehungen des Biegebalkens

a) den Verlauf der Querkraft Q (Skizze mit charakertistischen Werten ist ausreichend),

b) das zugehörige Lastbild.

c) Skizzieren Sie den EI-fachen Verlauf der Verdrehung $\phi(x)$ mit Angabe der Werte bei

$x = l$ (links vom Gelenk),
$x = 3/2\,l$,
$x = 2l$.

Gegeben ist der Wert an der Stelle $x = l$ (rechts vom Gelenk).

d) Skizzieren Sie die EI-fache Biegelinie $w(x)$.

e) Berechnen Sie die Durchsenkung an der Stelle $x = l$ mit dem Arbeitssatz.

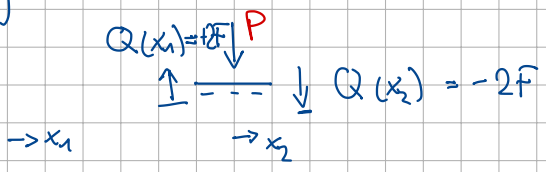
(Bearbeitungszeit: 14 Minuten)

a)

$$Q(x_1) = \frac{Fl - (-2Fl)}{\frac{3}{2}l} = \frac{3Fl}{\frac{3}{2}l} = 2F$$

$$Q(x_2) = \frac{0 - Fl}{\frac{l}{2}} = -2F$$

b)



$\oplus\uparrow \sum F \quad 2F - (-2F) - P = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 4F$

c)

$$EI\,\phi = -\int M(x)\,dx$$

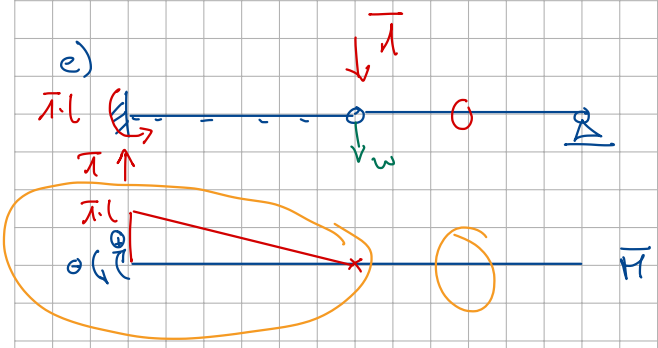
$$EI\,\phi(x=0) = 0 \quad \text{(Einspannung)}$$

$$EI\,\phi(x=l) = -\left(-2Fl\right)\cdot l \cdot 0{,}5 = +Fl^2$$

$$EI\,\phi\left(x=\tfrac{3}{2}l\right) = -\tfrac{5}{12}Fl^2 - Fl\cdot\tfrac{l}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = -\tfrac{8}{12}Fl^2$$

$$EI\,\phi(x=2l) = -\tfrac{8}{12}Fl^2 - Fl\cdot\tfrac{l}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = -\tfrac{11}{12}Fl^2$$

e)



Arbeitssatz

äußere Arbeit = virtuelle Kraft × reale Verschiebung

=

innere Arbeit: ~~virtuelle Normalkraft~~ × reale Dehnung

+ virtuelles Moment × reale Krümmung

$\overline{M}$ $\qquad w'' = -\frac{M}{EI}$

$$SW_i = \int \overline{M} \cdot \frac{M}{EI}\,dx$$

$\overline{M} \cdot w''$

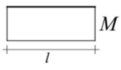
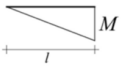
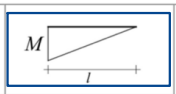
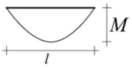
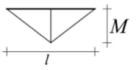
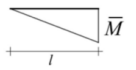
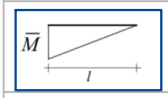
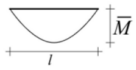
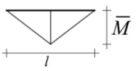
$\delta W_e \quad \overline{1} \cdot w(x=L) = \int \overline{M} \cdot \left(-\frac{M}{EI}\right) dx$

$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(-\left(-2F \cdot L\right)\right) \cdot L \cdot \frac{1}{EI} = \frac{2}{3} \frac{F \cdot L^3}{EI}$

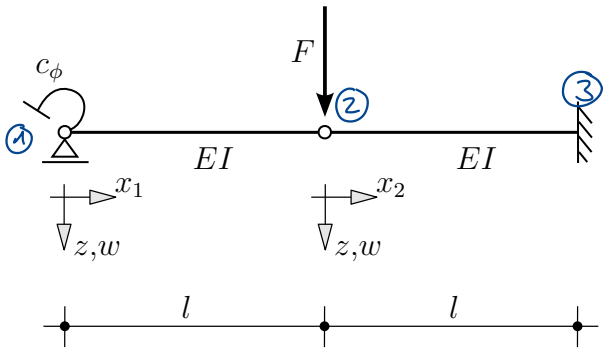
Lösung des Integrals mithilfe der Integraltafel (siehe Formelsammlung Seite 2)

Lehrstuhl für Baumechanik
TU München

Integraltafel:

$\int \overline{M} \cdot M \cdot dx$					
	$\overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{2} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{2} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{2}{3} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{2} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$
	$\frac{1}{2} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{3} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{6} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{3} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{4} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$
	$\frac{1}{2} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{6} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{3} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{3} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{4} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$
	$\frac{2}{3} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{3} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{3} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{8}{15} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{5}{12} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$
	$\frac{1}{2} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{4} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{4} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{5}{12} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{3} \cdot \overline{M} \cdot M \cdot l$

3. Für den dargestellten Zweifeldträger soll unter Verwendung der Differentialbeziehungen die Biegelinie ermittelt werden.



a) Welche DGL des Biegebalkens muss verwendet werden? Begründung!

b) Geben Sie sämtliche Rand- und Übergangsbedingungen an, die zur vollständigen Lösung der DGL erforderlich sind.

a) statisch bestimmtes System: Kräftegleichgewicht
statisch unbestimmtes System: Verformungsbedingungen

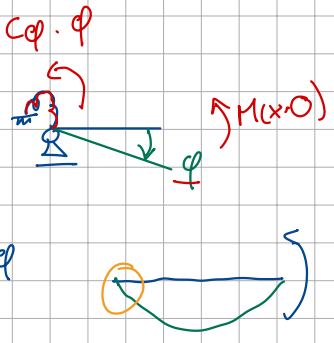
$EI\, w'''' = p(x)$

① $x_1 = 0$

$w(x_1=0)$

$M(x_1=0) + c_\varphi \cdot \varphi = 0$

$-w''(x_1=0)\cdot EI = -c_\varphi \cdot \varphi$



Verdrehung positiv von x-Achse in Richtung z-Achse

② $x_1 = l$, $x_2 = 0$

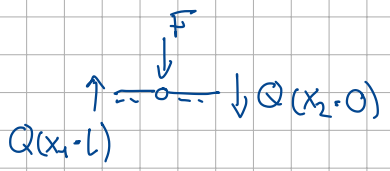
$w(x_1=l) = w(x_2=0)$

$M(x_1=l)=0 \Rightarrow w''(x_1=l)=0$

$M(x_2=0)=0 \Rightarrow w''(x_2=0)=0$

$\sum F = 0: \quad Q(x_1=l) - F - Q(x_2=0)$

$-w'''(x_1=l)\,EI - F - \left(-w'''(x_2=0)\cdot EI\right) = 0$

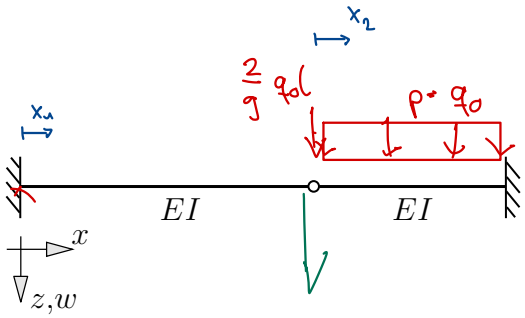


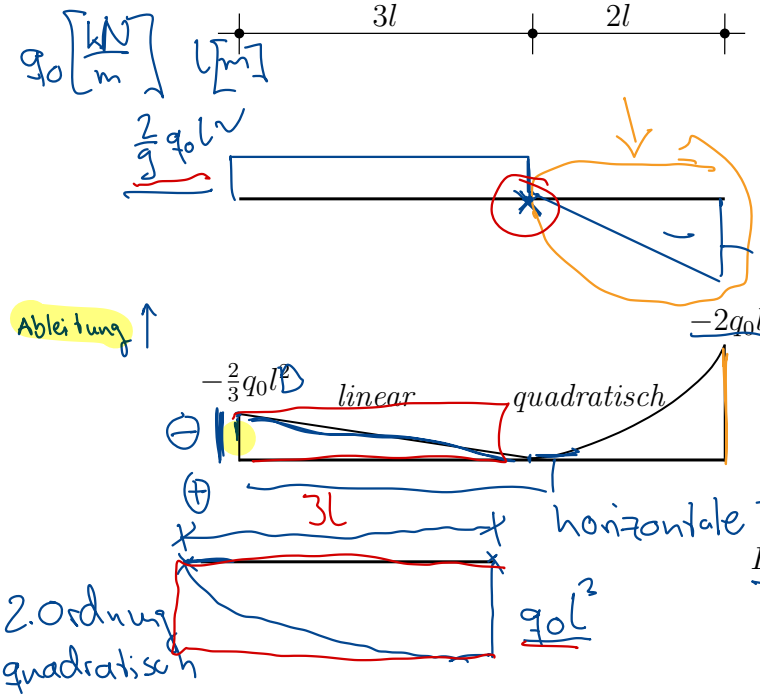
③ $x_2 = l$

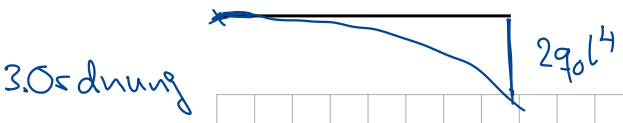
$w(x_2=l) = 0$

$w'(x_2=l) = 0$

4. Für den dargestellten Biegeträger ist der Verlauf des Biegemoments M_y gegeben (mit horizontaler Tangente unmittelbar rechts vom Gelenk)







Ermitteln Sie unter Verwendung der Differentialbeziehung des Biegebalkens

a) den Verlauf der Querkraft Q (Skizze mit charakteristischen Werten ist ausreichend) und

b) das zugehörige Lastbild. ✓

Skizzieren Sie für den Tragwerksteil links vom Gelenk

c) den EI-fachen Verlauf der Verdrehung $\phi(x)$ mit Angabe des Wertes bei $x = 3l$ und

d) die EI-fache Biegelinie $w(x)$.

e) Berechnen Sie die Durchsenkung an der Stelle $x = 3l$.

a)

$$Q(x_1) = \frac{0 - \left(-\frac{2}{3}q_0(2l)\right)}{3l} = \frac{2}{9}q_0l$$

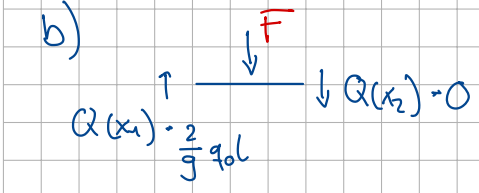
$Q(x_2)$ $\qquad$ $Q(x_2 = 0)$

$$M(x_2 = 2l) = \int_0^{2l} Q(x_2)\,dx + Q(x_2 = 0)$$

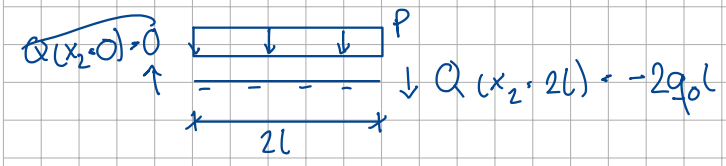
$M(x_2 = 2l) = Q(x_2 = 2l) \cdot 2l \cdot \frac{1}{2}$ (Flächeninhalt Dreieck)

$Q(x_2 = 2l) = \frac{M(x_2 = 2l)}{l} = \frac{-2q_0 l^2}{l} = -2q_0 l$

b)



$F = \frac{2}{3} q_0 l \; \left[\frac{kN}{m}\right] \cdot [m] \; [kN]$



$\oplus\downarrow \sum F = -2q_0 l + p \cdot 2l$

$p = \frac{2q_0 l}{2l} = q_0$

c) $EI\,\varphi(x_1 = 3l) = -\int_0^{3l} M(x_1)\,dx + EI\,\varphi(x_1 = 0)$

$= -\left(-\frac{2}{3} q_0 l^2 \cdot 3l \cdot \frac{1}{2}\right)$ (Flächeninhalt Dreieck)

$= q_0 l^3$

d) $EI\,w(x_1 = 3l) = \int_0^{3l} EI\,\varphi(x_1)\,dx + \cancel{EI\,w(x_1 = 0)}$ (= 0)

$EI\,w(x_1 = 3l) = q_0 \cdot l^3 \cdot 3l \cdot \boxed{\frac{2}{3}} = 2q_0 l^4$

Faktor aus Integraltafel

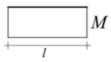
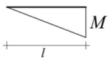
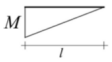
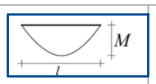
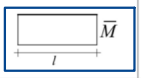
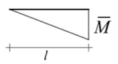
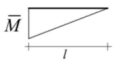
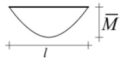
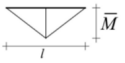
$w(x_1 = 3l) = \frac{2 q_0 l^4}{EI}$

Fläche einer beliebigen Parabel:

Lehrstuhl für Baumechanik
TU München

Kann auch so aussehen: 

Integraltafel:

$\int \bar{M} \cdot M \cdot dx$					
	$\bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{2} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{2} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{2}{3} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{2} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$
	$\frac{1}{2} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{3} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{6} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{3} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{4} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$
	$\frac{1}{2} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{6} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{3} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{3} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{4} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$
	$\frac{2}{3} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{3} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{3} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{8}{15} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{5}{12} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$
	$\frac{1}{2} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{4} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{4} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{5}{12} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$	$\frac{1}{3} \cdot \bar{M} \cdot M \cdot l$